

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan-Gauss usuli

Oldinroq, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda qo'llaniladigan Kramer formulalarini va matritsalar usulini ko'rdik. Bu usullarda tenglamalar va noma'lumlar soni ortgan sari hisoblash ishlarining hajmi juda tez ortib borishini ham payqagan bo'lishimiz kerak. Bu yerda, amaliy jixatdan ancha qulay bo'lgan usullardan biri bilan, ya'ni *Jordan-Gauss usuli* bilan tanishamiz. Bu usulni ba'zan *noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib (chiqarib) borish usuli* deb ham yuritiladi.

Soddalik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Bu sistema determinanti noldan farqli, ya'ni sistema yagona yechimga ega, undan tashqari, $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilamiz ($a_{11}=0$ bo'lsa, tenglamalarning o'rnini almashtirish bilan bunga erishish mumkin) va uni *etakchi koeffitsiyent*, unga mos tenglamani esa *etakchi tenglama* deb nomlaymiz.

Sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, etakchi tenglamani

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \quad (4.2.5)$$

ko'rinishga keltiramiz va x_1 ni *bazis noma'lum* deb hisoblaymiz. Bu yerda

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2;3;4).$$

Olingan (4.2.5) tenglama yordamida sistemaning qolgan ikkala tenglamalaridagi x_1 qatnashgan hadlarni yo'qotamiz (masalan, (4.2.5) ni $-a_{21}$ ga ko'paytirib ikkinchi tenglamaga hadlab qo'shsak $a_{21}x_1$ had yo'qotiladi):

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{2n}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{3n}^{(1)}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j} \cdot a_{i1} \quad (i = 2;3, \quad j = 2;3;4)$$

Endi, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib (aks xolda tenglamalar o'rnini almashtirib bunga erishamiz), uni (4.2.6) sistema uchun etakchi koeffitsiyent hisoblab, (4.2.6) sistemaning birinchi tenglamasini unga bo'lib, x_2 ni bazis noma'lum deb hisoblab,

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)}$$

tenglamani olamiz. Bu yerda

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3;4)$$

olingan oxirgi tenglama yordamida (4.2.6) sistema 2-tenglamasidagi x_2 qatnashgan hadni yo'qotib

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(1)} \quad (i = 3, \quad j = 3;4)$$

Shunday qilib, quyidagi teng kuchli sistemalarni oldik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ x_3 = a_{34}^{(3)} \end{cases}$$

Oxirgi sistemada $a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ va $a_{33}^{(2)}$ uni olish uchun etakchi koeffitsiyent, x_3 esa

bazis noma'lum bo'lishi ravshandir.

Bu teng kuchli sistemalarni hosil qilish jarayoni Jordan-Gauss usulining *olg'a borish bosqichi* deb yuritiladi. Unda bitta, ya'ni x_3 noma'lumning qiymati aniq bo'lib qoldi. Qolgan noma'lumlarning qiymatlari ketma-ket

$$x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3, \quad x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3$$

formulalar bilan hisoblanadi va bu jarayon usulning *ortga qaytish bosqichi* deb yuritiladi.

Bu usulni umumiy holda (4.2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qo'llash jarayoni ham xuddi yuqoridagidek kechadi.

Bu o'rinda shuni ham aytamizki, (4.2.1) sistemaning birgalikda ekanligi haqidagi ma'lumot bo'lmagan taqdirda ham (uni tekshirmasdan ham) unga bu usulni qo'llash mumkin. Bu holda, uning yechimi yagona bo'lsa, Jordan-Gauss usulining *olg'a borish jarayoni* yakunida (4.2.1) sistemani

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lib, uni *uchburchakli sistema* deb yuritiladi va mazkur holda sistemaning aniqlangan ekanligi ravshandir.

(4.2.1) sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lganda esa, uni

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_k + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = a_{k,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'ladi, bu yerda $1 \leq k \leq m$, $k < n$. Bunday sistemani *pog'onali sistema* deb ataladi va bu holda sistema aniqlanmagan bo'lishi ravshandir.

Agar (4.2.1) sistemaning yechimi mavjud bo'lmasa, Jordan-Gauss usulining *olg'a borish jarayonining* biror qadamida (Iteratsiyasida) ziddiyatli tenglama olinadi.

Yuqorida bayon qilingan usulning *olg'a borish jarayonini* quyidagicha 1-jadvalga joylashtirish qulaydir.

Bu jadvaldagi oxirgi ustun qilingan hisoblar to'g'ri borayotganini nazorat qilib borish uchun kerak bo'lib, unga joylashgan har bir satrdagi son shu satrdagi oldindagi ustunlarga joylashgan sonlar yig'indisiga teng bo'lishi kerak. Bu o'rinda, boshlang'ich Iteratsiyada bu ustunga joylashgan sonlar oldingi ustunlardagi sonlar yig'indisi sifatida

hisoblanadi, qolgan Iteratsiyalarda usuldagi hisob jarayoni bu ustunga ham qo‘llaniladi va so‘ngra, olingan son oldingi ustunlarda joylashgan sonlar yig‘indisiga teng ekanligi tekshiriladi, agar hisobda xatoga yo‘l qo‘yilgan bo‘lsa tenglik bajarilmaydi.

1-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	$\sum a_{1j} = a_{15}$ $\sum a_{2j} = a_{25}$ $\sum a_{3j} = a_{35}$
1-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ $a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$
2-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(2)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ $a_{33}^{(2)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(2)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(2)}$
3-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ 1	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(3)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(3)}$

Misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Jordan-Gauss usulini jadval ko‘rinishida tatbiq etamiz (2-jadval).

2-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	1 2 -1	2 -3 1	-1 1 1	2 -1 4	4 -1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	4 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 1	2 5/7 3	4 9/7 4

Olg‘a borish bosqichi yakunida uchburchakli sistemaga keldik.

Oxirgi Iteratsiyadan $x_3=3$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Qolgan noma‘lumlarni ortga qaytish bosqichi bilan topamiz.

$$x_2 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \cdot 3 = \frac{14}{7} = 2, \quad x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1.$$

Demak, sistema yechimi (1;2;3) dan iborat ekan.

Yuqorida keltirilgan usulni biroz mukammallashtirib, ortga qaytish bosqichidan holis bo‘lishimiz mumkin. Buning uchun har bir Iteratsiyada (qadamda) etakchi tenglamadan keyingi tenglamalardagi yo‘qotilishi lozim bo‘lgan bazis noma‘lumni undan oldingi tenglamalarda ham yo‘qotib borilsa bas. Bu yo‘l bilan yuqoridagi sistemani yechaylik (3-jadval yordamida).

3-jadval

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	1 2 -1	2 -3 1	-1 1 1	2 -1 4	4 -1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	10/7 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	1	1	1 2 3	2 3 4

Ya‘ni, ortga qaytish bosqichi kerak bo‘lmay qoldi, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

Jordan-Gauss usulini qo‘llashdagi Iteratsiyalarda (qadamlarda) tanlanadigan etakchi tenglama va Iteratsiya (qadam) nomerlarining mos tushishi shart emas. Har bir Iteratsiyada oldin tanlanmagan ixtiyoriy tenglamani etakchi deb tanlab, navbatdagi bazis noma‘lum sifatida oldingi Iteratsiyalarda tanlanmagan va koeffitsiyenti noldan farqli bo‘lgan noma‘lumni tanlab olish mumkinligini aytamiz. Bundan foydalanib, nol elementlari ko‘proq bo‘lgan ustun (yoki satr) yordamida hisoblash ishlarini tezlashtirish mumkin. Shuni ham aytamizki, jadval usulini qo‘llaganda bazis noma‘lumlarni belgilab borish ustunini ham yozib borish foydali bo‘ladi.

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

sistemani yechaylik (4-jadval).

Demak, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=1$.

4-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
------------	-------	-------	-------	-------	------------	----------------

Boshlang'ich Iteratsiya		1 2 1	1 -1 -2	1 -1	4 -6	6 2 -8
1-Iteratsiya	x_3	1 2 3	1 -1 -3	1	4 -6	6 2 -6
2-Iteratsiya	x_2 x_3	1 3 6	1	1	4 4 6	6 8 12
3-Iteratsiya	x_2 x_3 x_1		1	1	3 1 1	4 2 2

Uchrashi mumkin bo'lgan ba'zi-bir hollarni quyidagi misollar asosida tushintirishga harakat qilamiz.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (5-jadval).

5-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 0 0 1	1 1 1 3	0 2 1 3	0 0 -1 -1	1 1 0 2	3 4 1 8
1-Iteratsiya	x_1	1 0 0 0	1 1 1 2	0 2 1 3	0 0 -1 -1	1 1 0 1	3 4 1 5
2-Iteratsiya	x_1 x_4	1 0 0 0	1 1 -1 1	0 2 -1 2	0 0 1 0	1 1 0 1	3 4 -1 4
3-Iteratsiya	x_1 x_2 x_4	1 0 0 0	0 1 0 0	-2 2 1 0	0 0 1 0	0 1 1 0	-1 4 3 0

4-Iteratsiyani qilib bo'lmaydi, chunki oxirgi satr elementlarining barchasi nollarga aylanib ketdi. Bu oxirgi tenglama qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatadi. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, yuqoridagi jarayon natijasida bu yechimlarni $x_1 = 2x_3$,

$x_2=1-2x_3$, $x_4=1-x_3$ ko‘rinishida bo‘lib, bu yerda x_3 ozod noma’lum ixtiyoriy qiymat olishi mumkin. Bu misolda oxirgi interaciya natijasida pog‘onali sistemaga keldik.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (6-jadval).

6-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya		1	3	-1	1	0	4
		1	-1	1	0	1	2
		0	1	1	-1	2	3
1-Iteratsiya	x_1	1	3	-1	1	0	4
		0	-4	2	-1	1	-2
		0	1	1	-1	2	3
2-Iteratsiya	x_1	1	4	0	0	2	7
		0	-5	1	0	-1	-5
	x_4	0	-1	-1	1	-2	-3
3-Iteratsiya	x_1	1	4	0	0	2	7
	x_3	0	-5	1	0	-1	-5
	x_4	0	-6	0	1	-3	-8

4-Iteratsiyani bajarib bo‘lmaydi, chunki bazis ustuni to‘lib qoldi. Demak, x_2 —ozod noma’lum bo‘lib, yechim $x_1=2-4x_2$, $x_3=-1+5x_2$, $x_4=-3+6x_2$ dan iboratdir. Bu misolda ham pog‘onali sistemaga keldik.

3-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (7-jadval).

3-Iteratsiyani bajarib bo‘lmaydi, chunki oxirgi satrdagi koeffitsiyentlar barchasi 0 bo‘lib, o‘ng tomonda noldan farqli 6 soni turibdi (ya’ni $0=6$ ziddiyatli tenglikka egamiz). Demak, sistema yechimga ega emas.

7-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya		1	2	-1	0	2
		-1	-2	3	2	2
		1	2	-4	3	2
1-Iteratsiya	x_1	1	2	-1	0	2
		0	0	2	2	4
		0	0	-3	3	0

2-Iteratsiya	x_1	1	2	0	1	4
	x_3	0	0	1	1	2
		0	0	0	6	6

4 – bobga doir mashqlar

1. Amallarni bajaring:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c) 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matritsalar ko'paytmasini toping.}$$

$$\text{Javob: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Matritsalar ni transponirlang:

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Javob: } a) \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-9}{13} \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

5. Matritsaning rangini toping:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasidan foydalanib tekshiring:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

7. Tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usulidan foydalanib yeching:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Javob: $a)$ (1;5; 2), $b)$ (1; 2; 3; -4)